Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

Для студентів спеціальності:
«Системний аналіз і управління»

Київ 2004

Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

Для студентів спеціальності:
«Системний аналіз і управління»

Затверджено
на засіданні Вченої Ради
Інституту прикладного
системного аналізу

Протокол №?? від ??? 2003 року

Київ 2004

Методичний посібник до лабораторних робіт з курсу «Методи оптимізації». Для студентів спеціальності: системний аналіз і управління / Укладачі: А.Яковлева, І.Спекторський. - К.: НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004. - 64 с.

Навчальне видання

Методичний посібник
до лабораторних робіт з курсу « Методи оптимізації»

Для студентів спеціальності: системний аналіз і управління

Укладачі: Яковлева Алла Петрівна, Спекторський Ігор Якович

Відповідальний редактор: Романенко Віктор Демидович

Рецензент: ???

Зміст

Загальні теоретичні відомості

1. Постановка оптимізаційної задачі

На сьогодні розроблено та досліджено велику кількість методів мінімізації функцій векторного аргументу. Зупинимось на деяких найвідоміших методах мінімізації, часто використовуваних на практиці. Наведемо стислий опис кожного з методів, винесених на дослідження в циклі лабораторних робіт, а також розглянемо їх деякі обчислювальні аспекти. Обмежимось одним-двома різновидами кожного методу, що вважається цілком достатнім для засвоєння його суті.

Розглянемо загальну *оптимізаційну задачу*

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{1}$$

де X – задана множина; $f(x)$ – функція, визначена на X. Потрібно знайти точки мінімуму функції f на множині X. При цьому f називають *цільовою функцією*, X – *допустимою множиною*, кожний елемент $x \in X$ – *допустимою точкою* задачі (1). Надалі, якщо не вказано інше, розглядатимемо скінченновимірні задачі оптимізації, тобто вважатимемо $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Розглянемо лише задачу мінімізації, оскільки задача максимізації $f(x) \to \max$, $x \in X$ еквівалентна аналогічній задачі мінімізації: $-f(x) \to \min$, $x \in X$ (множини розв'язків цих задач збігаються).

Точка $x^* \in X$ називається точкою *глобального мінімуму* функції f на множині X, або *глобальним розв'язком задачі мінімізації* (1), якщо

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in X. \tag{2}$$

Точка $x^* \in X$ називається точкою *локального мінімуму* функції f на множині X, або *локальним розв'язком задачі мінімізації* (1), якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in U_\varepsilon(x^*), \tag{3}$$

де $U_\varepsilon(x^* = \{x \in X : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\})$ – куля радіуса ε з центром у x^*.

Якщо нерівності (2) або (3) виконуються в строгому сенсі, точку x^* називають точкою *строгого мінімуму* відповідно в глобальному чи локальному сенсі.

Іноді, спираючись на умови оптимальності або на геометричну інтерпретацію, можемо отримати розв'язок задачі (1) в явному вигляді. Але, зазвичай, задачу оптимізації доводиться розв'язувати числовими (найчастіше наближеними) методами, використовуючи обчислювальну техніку.

Будь-який числовий метод розв'язання оптимізаційної задачі базується на точному чи наближеному обчисленні її характеристик – значень цільової функції, значень функцій, що задають обмеження (допустиму підмножину $\mathbb{R}^n$), а також значень похідних цих функцій. На основі одержаної інформації будується наближений розв'язок – наближення до шуканої точки мінімуму x^*, або, якщо точка мінімуму не єдина, наближення (у певному сенсі) до множини точок мінімуму. Інколи будується наближення до мінімального значення функції

$$f^* = \min_{x \in X} f(x).$$

Які саме характеристики потрібно вибрати для обчислень, залежить від властивостей цільової функції та обмежень, а також від можливостей обчислювальної техніки. Алгоритми, що використовують лише інформацію про значення цільової функції, називають *алгоритмами нульового порядку*; алгоритми, що використовують інформацію про значення перших похідних – *алгоритмами першого порядку*, других похідних – *алгоритмами другого порядку* тощо.

Робота алгоритму складається з двох основних етапів:

– обчислення характеристик задачі, потрібних для роботи алгоритму.

– побудова на основі отриманої інформації наближення до розв'язку.

Якщо точки множини X, потрібні для обчислення характеристик, обираються один раз на початку роботи алгоритму і надалі не змінюються, алгоритм мінімізації називають *пасивним*. Зазвичай у разі числового розв'язання оптимізаційної задачі використовують *послідовні* («ітераційні») алгоритми: точка x^{i+1} ($(i+1)$-й крок) обчислюється лише тоді, коли вже обчислені точки на попередніх кроках (ітераціях) – $x^1, \ldots, x^i$ та на кожному кроці $1, \ldots, i$ проведені обчислення згідно із цим алгоритмом.

Ітерацію будь-якого послідовного алгоритму розв'язання задачі (1) можна подати у вигляді:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k, \quad h_k \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Конкретний алгоритм визначається вибором початкової точки x^0, правилом вибору векторів h^k та чисел α_k на основі одержаної в результаті обчислень інформації, а також умовою закінчення роботи. Вектор

h^k визначає *напрям* $(k+1)$*-го кроку* алгоритму мінімізації, а коефіцієнт α_k – *довжину* цього кроку.

Методи мінімізації, що гарантують отримання розв'язку за скінченну кількість кроків, називають *скінченнокроковими*. Для *нескінченнокрокових* алгоритмів на кожному кроці отримується лише наближене значення розв'язку задачі; точне значення розв'язку може бути отримане лише через граничний перехід за номером ітерації.

Кажуть, що метод (4) збігається, якщо

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^k,$$

де x^* – розв'язок задачі (1).

Якщо $f(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x^*)$, то кажуть, що метод (4) збігається за функцією.

У разі, якщо точка мінімуму x^* не єдина, під збіжністю методу можна розуміти збіжність послідовності x^k $(k \geq 1)$ до множини X^* точок мінімуму функції f (за стандартного визначення відстані від точки до множини).

Ефективність методу мінімізації визначається *швидкістю збіжності*. Наведемо визначення лінійної, надлінійної та квадратичної швидкості.

Нехай $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$.

1. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *лінійно* або зі швидкістю геометричної прогресії, якщо існують такі константи $q \in (0,1)$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q\|x^k - x^*\| \quad \text{для всіх } k \geq k_0,$$

або, що те саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_1 q^{k+1} \text{ для всіх } k \geq k_0 \quad (C_1 = \|x^1 - x^*\|).$$

2. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *надлінійно*, якщо

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q_k\|x^k - x^*\|, \quad q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

або, що те саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_2 q_1 q_2 \cdots q_{k+1},\ q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad (C_2 = \|x^1 - x^*\|).$$

3. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *квадратично*, якщо існують такі константи $C \geq 0$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C\|x^k - x^*\|^2 \quad \text{для всіх } k \geq k_0,$$

або, що те саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq A \cdot C^{2^k} \quad \text{для всіх } k \geq k_0 \quad (A = \|x^1 - x^*\|).$$

Нескінченнокрокові методи доповнюють *умовою зупинки*. На практиці найчастіше використовують такі умови зупинки:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon_1;$$
$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon_2;$$
$$\|f'(x^{k+1})\| \leq \varepsilon_3.$$

До початку обчислень обирають одну з наведених умов зупинки та мале додатне ε_i. Обчислення закінчують після $(k+1)$-го кроку, коли вперше виконується обрана умова.

Зауваження 1. Деякі оптимізаційні алгоритми для нормального закінчення потребують виконання двох або трьох наведених вище умов.

Вектор h задає *напрям спадання* функції f у точці x, якщо

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

при всіх достатньо малих $\alpha > 0$.

Метод $x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ називають *методом спуску*, якщо при всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ вектор h^k задає напрям спадання функції f у точці x^k та числа $\alpha_k > 0$ вибрані так, що $f(x^{k+1}) < f(x^k)$. Прикладом методу спуску є градієнтний метод, у якому $h^k = -f'(x^k)$ (довести самостійно).

2. Вибір довжини кроку

1. Коефіцієнт α_k можна визначати з умови

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h^k). \tag{5}$$

Метод (5) називають *методом найшвидшого спуску*. Цей метод – оптимальний у тому сенсі, що він забезпечує досягнення найменшого значення функції f уздовж заданного напряму h.

Приклад. Для квадратичної функції $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$ із симетричною додатно визначеною матрицею A метод найшвидшого спуску визначається рівністю

$$\alpha_k = -\frac{(Ax^k + b, h^k)}{(Ah^k, h^k)}.$$

2. Визначити точне значення α_k з умови (5) не завжди можливо і не завжди доцільно (напрям h^k забезпечує спадання функції f лише в малому околі точки x^k). Розглянемо два методи вибору α_k, які в разі відповідних припущень на функцію f забезпечують виконання нерівності

$$f(x^k + \alpha_k h^k) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha_k (f'(x^k), h^k), \tag{6}$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$:

1) нехай функція f диференційовна на $\mathbb{R}^n$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшіца, тобто за деякого $M > 0$

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Тоді умова (6) виконується при

$$0 < \alpha_k < -\frac{(1 - \varepsilon)(f'(x^k), h^k)}{M\|h^k\|^2};$$

2) нехай функція f двічі диференційовна на $\mathbb{R}^n$, а її матриця других похідних за деякого $D > 0$ задовольняє умову

$$(f''(x)h, h) \leq D\|h\|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Тоді умова (6) виконується при

$$0 < \alpha_k < -\frac{2(1 - \varepsilon)(f'(x^k), h^k)}{D\|h^k\|^2}.$$

Зауваження 2. У деяких методах спуску коефіцієнт α_k можна вибрати постійним: $\alpha_k = \alpha > 0$. Так, у випадку градієнтного методу спуску $(h^k = -f'(x^k))$ при $\alpha_k = \alpha$ наведені в пунктах 1) та 2) оцінки для α_k набувають вигляду

$$\alpha \in \left(0, \frac{1-\varepsilon}{M}\right), \quad \alpha \in \left(0, \frac{2(1-\varepsilon)}{D}\right)$$

відповідно.

3. На практиці часто використовують *метод дроблення кроку*:

– на початку роботи алгоритму обирають фіксовані константи $\beta > 0$ та $\lambda \in (0,1)$ (часто фіксують $\lambda = \frac{1}{2}$);
– на кожному кроці k рекурентно визначають послідовність $\alpha_{k,n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$:
$$\alpha_{k,0} = \beta, \quad \alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n} h;$$
– довжину кроку α_k обирають як значення $\alpha_{k,n}$ за найменшим n $(n = 0, 1, 2, \dots)$, що задовольняє умову
$$f(x^k + \alpha_{k,n} h^k) < f(x^k),$$
тобто $\alpha_k = \min\limits_{n>0}\{\alpha_{k,n} \colon f(x^k + \alpha_{k,n} h^k) < f(x^k)\}$.

Очевидно, що процес дроблення кроку (процес множення довжини кроку на коефіцієнт λ) не може виявитись нескінченним, оскільки h^k – напрям спадання функції f.

Для детального вивчення числових методів оптимізації можна рекомендувати роботи [1–10].

Лабораторна робота 1

Числові методи безумовної оптимізації першого порядку. Градієнтний метод та його варіації

1.1. Теоретичні відомості

Градієнтний метод – один з класичних методів мінімізації першого порядку. Він базується на заміні цільової функції f в околі точки чергової точки x^k лінійною частиною розкладу її в ряді Тейлора.

У методах спуску послідовність наближень $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ до точки мінімуму вибирається за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де h^k – напрям спадання функції f у точці x^k. У градієнтному методі h^k беруть рівним антиградієнту функції f у точці x^k, тобто $h^k = -f'(x^k)$. Отже, у градієнтному методі

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Якщо довжину кроку вибирати з умови (одновимірної) мінімізації функції уздовж напряму антиградієнта, одержуємо варіант градієнтного методу, що називається *градієнтним методом найшвидшого спуску*. На практиці, зазвичай, доводиться задовольнятись наближеними методами пошуку оптимального значення довжини кроку, наприклад, методом дроблення.

Якщо цільова функція не опукла, градієнтний метод забезпечує лише збіжність до множини стаціонарних точок функції f. Наведемо дві теореми про збіжність градієнтного методу.

Теорема 1.1. *Нехай функція f диференційовна та обмежена знизу на $\mathbb{R}^n$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшіца (7). Тоді за довільної* *початкової точки* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *для методу* (1.1)

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f'(x^k) \right\| = 0.$$

Теорема 1.2. *Нехай функція* f *двічі диференційовна та сильно опукла на* $\mathbb{R}^n$, *а її матриця других похідних задовольняє умову* (8). *Тоді за довільної початкової точки* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *послідовність* x^k $(k \geq 1)$, *визначена формулою* (1.1), *збігається до точки мінімуму* x^* *із швидкістю геометричної прогресії:*

$$f(x^k) - f(x^*) \leq q^k (f(x^0) - f(x^*));$$
$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq C(\sqrt{q})^k,$$

де $C > 0$, $q \in (0, 1)$ – *константи.*

Якщо матриця других похідних цільової функції погано обумовлена ($\frac{d}{D} \ll 1$, де d та D – відповідно найменше та найбільше власні значення матриці $f''(x)$, f вважається сильно опуклою, $x \in \mathbb{R}^n$ – фіксоване), градієнтний метод збігається повільно. Геометрично це виражене в тому, що лінії рівня функції f мають «*ярну*» структуру, і напрям вектора $-f'(x)$ може сильно відхилятись від напрямку точки мінімуму. Шлях послідовності x^k $(k \geq 1)$ до точки мінімумуноситиме явно виражений зигзагоподібний характер. Іноді кажуть, що відбувається «*нишпорення*» методу, що, очевидно, є його недоліком.

Під час пошуку мінімуму «ярної» функції для прискорення збіжності методу застосовують так званий *ярний метод*:

- на початку роботи алгоритму задають дві точки v^0 та v^1, з яких роблять спуск за градієнтним методом й одержують відповідно точки x^0 та x^1 (ці точки будуть розміщені «на дні яру»);
- одержують точку $v^2 = x^1 - \frac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|} \cdot t \cdot \operatorname{sign}(f(x^1) - f(x^0))$, де t – додатна константа (*ярний крок*);
- з точки v^2 (яка, у загальному випадку, може опинитись «на схилі яру») роблять спуск градієнтним методом, отримуючи точку x^2 «на дні яру»;
- за відомих x^0, x^1, …, x^k $(k \geq 2)$ отримують точку

  $$v^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{\|x^k - x^{k-1}\|} \cdot t \cdot \operatorname{sign}(f(x^k) - f(x^{k-1})),$$

  з якої роблять спуск градієнтним методом, отримуючи точку x^{k+1} «на дні яру».

Це лише один з існуючих способів прискорення збіжності градієнтного методу.

Аналогом градієнтного методу для опуклих недиференційовних функцій є *субградієнтний метод*. У цьому методі послідовність x^k ($k \geq 1$) визначається правилом

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де $h^k \in \partial f(x^k)$ – субградієнт функції f у точці x^k. Зазначимо, що h^k обирають з множини $\partial f(x^k)$ довільно.

Зауваження 1.1. Для числового обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

1.2. Завдання до лабораторної роботи

1. У табл. 1.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з градієнтних методів. Конкретний тип градієнтного методу обрати самостійно, ураховуючи особливості функції f (наприклад, ярність). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

Під час складання програми треба:

– обчислити цільову функцію в окремій підпрограмі;
– частинні похідні цільової функції обчислити числово.

3. Знайти мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета числової оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом учених-

математиків під керівництвом академіка НАН України Б. М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

Таблиця 1.1. **Варіанти завдань до лабораторних робіт 1, 2 та 4**

Варіант	Цільова функція f
1	$x^2 + 18y^2 + 0,01xy + x - y$
2	$x^2 + 28y^2 + 0,02xy - x - y$
3	$x^2 + 8y^2 + 0,001xy - x - y$
4	$x^2 + 18y^2 + 0,01xy + x - y$
5	$2x^2 + 8y^2 - 0,01xy + x - y$
6	$x^2 + 4y^2 + 0,001xy - y$
7	$3x^2 + 8y^2 + 0,015xy - x - y$
8	$x^2 + 2y^2 + 0,012xy - 2x + y$
9	$11x^2 + 18y^2 + 0,01xy + x$
10	$3x^2 + 2y^2 - 0,01xy + x - y$
11	$16x^2 + 15y^2 + 2z^2 + +0,018xy + x - z$
12	$2x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 0,01xz - x - y$
13	$2x^2 + 4y^2 + z^2 + 0,0013xy + 0,001xz - y$
14	$13x^2 + 8y^2 + z^2 + 0,001xy + 0,02xz + y$
15	$12x^2 + 18y^2 + 3z^2 - 0,01xz + x - y$
16	$11x^2 + 14y^2 + z^2 + 0,01xy - 0,001yz - y$
17	$13x^2 + 18y^2 + 3z^2 + 0,015xz - y$
18	$15x^2 + 2y^2 + 0,012xy - x + y$
19	$12x^2 + 14y^2 + 0,01xy + 3x$
20	$15x^2 + 18y^2 - 0,03xy + x - y$
21	$(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
22	$(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$
23	$100(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
24	$10\,000(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
25	$100(y - x^3)^2 + 100(1 - x)^2$

1.3. Додаткові завдання до лабораторної роботи

1. Показати, що в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функція

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 + x_2}$$

опукла, та визначити її мінімальне значення. За початкову точку взяти $(x_1^0; x_2^0) = (0{,}6; 0{,}2)$. Ітерації завершувати на k-й ітерації за виконання умови

$$\max_{i \in \{1;2\}} \left| \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_i^k} \right| < \varepsilon,$$

де ε задає користувач.

2. Показати, що в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функція

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

опукла, та визначити її мінімальне значення. За початкову точку взяти $(x_1^0; x_2^0) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10})$. Ітерації завершувати на k-й ітерації за виконання умови

$$\max_{i \in \{1;2\}} \left| \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_i^k} \right| < \varepsilon,$$

де ε задає користувач.

Лабораторна робота 2

Числові методи безумовної оптимізації другого порядку. Метод Ньютона та його варіації

2.1. Теоретичні відомості

Метод Ньютона та його модифікації – найефективніший засіб числового розв'язання задач безумовної оптимізації. Надалі припускається, що функція f строго опукла і двічі диференційовна на $\mathbb{R}^n$, причому матриця $f''(x)$ невироджена на $\mathbb{R}^n$. У методі Ньютона послідовність $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ будують за правилом

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + h^k, \\ h^k &= -[f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отже, метод Ньютона – це метод мінімізації другого порядку. Як видно з (2.1), довжина кроку $\alpha_k = 1$; напрям, що визначається вектором h^k, є напрямом спадання функції f.

Квадратична апроксимація заданої функції в малому околі деякої точки значно точніша за лінійну апроксимацію. Тому в методі Ньютона природно сподіватися на більш точне наближення до розв'язку, ніж у градієнтному методі. Наведемо теорему про збіжність методу Ньютона.

Теорема 2.1. *Нехай функція f двічі диференційовна, сильно опукла з константою $\Theta > 0$ на $\mathbb{R}^n$ та задовольняє умову*

$$\|f''(x) - f''(\widetilde{x})\| \leq M\|x - \widetilde{x}\|,$$

де $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $M > 0$, а початкова точка x^0 така, що:

$$\left\|f'(x^0)\right\| \leq \frac{8\Theta^2}{M} \text{ або } \left\|f'(x^0)\right\| \leq \frac{8\Theta^2}{M}q, \text{ де } q \in (0; 1).$$

Тоді послідовність x^k $(k \geq 1)$, що визначається формулами (2.1), збігається до точки мінімуму x^* функції f з квадратичною швидкістю:

$$\left\|x^k - x^*\right\| < \frac{4\Theta^2}{M} q^{2^k}.$$

Збіжність методу Ньютона доведена лише для достатньо хорошого початкового наближення x^0. Недоліками методу є також складність пошуку потрібного початкового наближення та великий обсяг обчислень (на кожному кроці потрібно обчислювати й обертати матрицю других похідних цільової функції).

Модифікації методу Ньютона спрямовані на те, щоб, зберігши його основну перевагу – швидку збіжність, зменшити обсяг обчислень і послабити вимоги до вибору початкового наближення. В *узагальненому методі Ньютона* (так званий *метод Ньютона з регулюванням кроку*) послідовність x^k $(k \geq 1)$ будується за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0,\ h^k = -[f''(x^k)]^{-1} f'(x^k) \tag{2.2}$$

(якщо $\alpha_k = 1$, метод збігається з класичним методом Ньютона).

Метод (2.2) можна також подати у вигляді

$$f''(x^k) \cdot h^k = -f'(x^k);\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k.$$

Отже, для визначення вектора h^k можна розв'язувати систему лінійних рівнянь замість того, щоб обертати матрицю $f''(x^k)$.

Розглянемо два варіанти узагальненого методу Ньютона, які розрізняються способом вибору параметра α.

Перший спосіб. 1. Вважаємо, що $\alpha = 1$.

2. За обраного α обчислюємо точку $x = x^k + \alpha h^k$ та значення функції $f(x) = f(x^k + \alpha h^k)$.

3. Перевіряємо нерівність:

$$f(x) - f(x^k) \leq \varepsilon\alpha \left\langle f'(x^k), h^k \right\rangle, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

(ε – довільна константа, однакова для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$).

4. Якщо нерівність п. 3 виконується, беремо $\alpha_k = \alpha = 1$ і закінчуємо роботу алгоритму; інакше, виконуємо дроблення α і повертаємось до п. 2.

Другий спосіб. Значення α_k обираємо як точку мінімуму цільової функції в напрямі антиградієнта:

$$f\left(x^k - \alpha_k [f''(x^k)]^{-1} f'(x^k)\right) = \min_{\alpha > 0} f\left(x^k - \alpha [f''(x^k)]^{-1} f'(x^k)\right).$$

Порівняння двох наведених способів регулювання довжини кроку демонструє перевагу першого способу, який у середньому потребує меншої кількості обчислень цільової функції.

Для сильно опуклих двічі диференційовних функцій метод Ньютона збігається незалежно від вибору початкової точки x^0 із надлінійною або квадратичною швидкістю (за наявності додаткових умов на функцію f).

Зауваження 2.1. Для числового обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

2.2. Завдання до лабораторної роботи

1. У табл. 1.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з методів другого порядку (типу Ньютона). Конкретний тип методу обрати самостійно, ураховуючи особливості функції f (наприклад, ярність). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

У процесі складання програми потрібно:

– обчислити цільову функцію в окремій підпрограмі;
– частинні похідні цільової функції обчислити числово.

3. Знайти мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета числової оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом учених-математиків під керівництвом академіка НАН України Б. М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

Лабораторна робота 3

Числові методи нелінійної умовної оптимізації. Метод проекції градієнта

3.1. Теоретичні відомості

Розглянемо метод проекції градієнта для розв'язання задачі

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{3.1}$$

де X – замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^n$; f – диференційовна функція на X. Цей метод є модифікацією градієнтного методу безумовної оптимізації на випадок умовних задач.

Проекцією точки a на множину $X \in \mathbb{R}^n$ називається точка $\pi_X(a) \in X$, найближча до точки a серед усіх точок з множини X.

Число $\pi_X(a)$ – розв'язок задачі проектування

$$\varphi(x) = \|x - a\|^2 \to \min, \quad x \in X. \tag{3.2}$$

Поняття проекції точки a на множину X має сенс для довільної множини $X \in \mathbb{R}^n$, однак у загальному випадку проекція точки на множину може визначатись неоднозначно (задача мінімізації (3.2) може мати більше одного розв'язку). Існування та єдиність розв'язку задачі (3.2) гарантує умова опуклості та замкненості множини $X \in \mathbb{R}^n$ (див., зокрема, [3]).

Якщо X – замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^n$, мають місце такі твердження (наприклад, [3]).

1. Точка $\bar{x}$ – проекція точки a на множину X ($\overline{x} = \pi_X(a)$) тоді і тільки тоді, коли

$$(\overline{x} - a, x - \overline{x}) \geq 0$$

при всіх $x \in X$.

2. Для будь-яких точок $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^n$ виконується оцінка:

$$\left\|\pi_X(a^1) - \pi_X(a^2)\right\| \le \left\|a^1 - a^2\right\|.$$

В основу методу проекції градієнта покладено теорему 3.1 (див., наприклад, [3]).

Теорема 3.1. *Нехай множина $X \in \mathbb{R}^n$ – опукла і замкнена, функція f – опукла на X та диференційовна в точці $x^* \in X$. Тоді для того щоб точка x^* була розв'язком задачі (3.1), необхідно і достатньо виконання умови*

$$x^* = \pi_X\left(x^* - \alpha f'(x^*)\right) \text{ за довільного } \alpha > 0.$$

У методі проекції градієнта за чергову точку наближення до розв'язку задачі (3.1) вибирають проекцію на множину X тієї точки, яку одержують застосуванням градієнтного методу:

$$x^{k+1} = \pi_X\left(x^k - \alpha_k f'(x^k)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Коефіцієнти $\alpha_k \ge 0$ можна вибирати за методиками, описаними вище. Наприклад, існують різноманітні модифікації методу найшвидшого спуску з наближеним розв'язанням (на кожному кроці) задачі одновимірної мінімізації по α, можливий вибір α дробленням кроку тощо.

Наведемо теорему про збіжність методу (див., наприклад, [3]).

Теорема 3.2. *Нехай множина $X \in \mathbb{R}^n$ – опукла і замкнена, функція f – сильно опукла з константою $\theta > 0$ та диференційовна на X, причому градієнт f задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \le M\|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$

Тоді послідовність x^k $(k \ge 1)$, що генерується за правилом (3.3) за довільних $x^0 \in X$ та $\alpha_k \in \left(0; \frac{4\theta}{M^2}\right)$, збігається до розв'язку x^* задачі (3.1) зі швидкістю геометричної прогресії

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\| \le q\left\|x^k - x^*\right\|, \text{ де } q = \sqrt{1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 M^2} \in (0; 1).$$

В описаному методі на кожній k-й ітерації потрібно проводити операцію проектування точки на множину X, тобто розв'язувати задачу виду (3.2) при $a = x^k - \alpha_k f'(x^k)$. У деяких випадках вдається побудувати явну формулу для проекції, наприклад, коли X – куля, координатний паралелепіпед, невід'ємний ортант, гіперплощина, півпростір тощо (див. підрозд. 3.2).

Зауваження 3.1. Для числового обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

3.2. Завдання до лабораторної роботи

1. У табл. 3.1 знайти цільову функцію f з відповідними обмеженнями згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Скласти програму для умовної мінімізації цільової функції f одним з методів проекції градієнта. Конкретний тип методу обрати самостійно, ураховуючи особливості функції f та обмежень. Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

Під час складання програми потрібно:

– обчислити цільову функцію та функції обмежень в окремій підпрограмі;
– частинні похідні обчислити числово.

3. Знайти умовний мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета числової оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом учених-математиків під керівництвом академіка НАН України Б. М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відо-

бразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму умовної мінімізації.

Таблиця 3.1. **Варіанти завдань до лабораторної роботи 3**

Варіант	Цільова функція	Обмеження
1	$x^2 + y^2 + z^2$	$x + y + z = 1$
2	$2x^2 + 3y^2 + z^2$	$3x + 2y + z = 1$
3	$x^2 + 3y^2 + 2z^2$	$2x + y + 3z = 1$
4	$4x^2 + y^2 + z^2$	$x + 2y + 3z = 1$
5	$2x^2 + y^2 + 3z^2$	$4x + y + z = 1$
6	$x + y + z$	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
7	$2x + 3y + z$	$3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$
8	$3x + y + 2z$	$2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1$
9	$x + 4y + z$	$x^2 + 3y^2 + 2z^2 \leq 1$
10	$x + 2y + 3z$	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
11	y	$y - x^2 \geq 0$
12	$100(x^2 - y)^2 + (x - 1)^2$	$x(x - 4) - 2y + 12 = 0$
13	$-y$	$1 + x - 2y \geq 0;\ x^2 + y^2 - 1 = 0;$ $x \geq 0$
14	$-x$	$y - x^3 - z^2 = 0;\ x^2 - y - t^2 = 0$
15	x	$(x - 1)^3 - y = 0;\ x \geq 1;\ y \geq 0$
16	$-x$	$(1 - x)^3 - y \geq 0;\ x \geq 0;\ y \geq 0$

17	$-x$	$0,125 - y - (x-1)^3 \geq 0;$ $x \geq 0;\; y \geq 0$
18	$-x$	$e^{e^x} \geq 0;\, y - e^{e^x} \geq 0;\, y \leq 10$
19	$x^2 + y^2$	$x + y - 1 \geq 0;\; x^2 + y^2 - 1 \geq 0;$ $9x^2 + y^2 - 9 \geq 0;\; x^2 - y \geq 0;$ $y^2 - x \geq 0$
20	$-xy$	$x^2 + y^2 \geq 0;\; 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ $x \geq 0;\; y \geq 0$
21	$(x-2)^2 + (y-1)^2$	$-x^2 + y \geq 0;\, y - x^2 \geq 0$
22	$x^2 + y$	$-x - y + 1 \geq 0;\, -(x^2 + y^2) + 9 \geq 0$
23	y	$-2x^2 + x^3 + y \geq 0;$ $-2(1-x)^2 + (1-x)^3 + y \geq 0$
24	$100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$	$x + 3y + 0,3 \geq 0;$ $-x + 3y + 0,3 \geq 0$
25	$100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$	$x^2 + y^2 - 0,25 \geq 0$

3.3. Явні формули обчислення проекції $\pi_X a$ для деяких множин X

Нехай $a \in \mathbb{R}^n$. Розглянемо деякі конкретні випадки множини $X \in \mathbb{R}^n$.

1. Множина X – куля:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \left\|x - x^0\right\| \leq r\};$$

$$\pi_X a = x^0 + \frac{a - x^0}{\|a - x^0\|} \cdot r.$$

2. Множина X – координатний паралелепіпед:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon b_j \le x_j \le c_j,\ j = 1, \ldots, n\};$$
$$(\pi_X a)_j = \begin{cases} b_j, & \text{якщо } a_j < b_j; \\ a_j, & \text{якщо } b_j \le a_j \le c_j; \\ c_j, & \text{якщо } a_j > c_j. \end{cases}$$

3. Множина X – невід'ємний ортант:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n\};$$
$$\pi_X a = (\max(0, a_1), \max(0, a_2), \ldots, \max(0, a_n))\,.$$

4. Множина X – гіперплощина:

$$X = H_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (p, x) = \beta\} \quad (p \ne 0);$$
$$\pi_X a = a + (\beta - (p, a)) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}.$$

5. Множина X – півпростір:

$$X = H^+_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (p, x) \ge \beta\} \quad (p \ne 0);$$
$$\pi_X a = a + \max\left(0; \beta - (p, a)\right) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}.$$

Лабораторна робота 4

Методи спряжених напрямів. Метод спряжених градієнтів

4.1. Теоретичні відомості. Методи спряжених напрямів для квадратичної функції

Методи спряжених напрямів, якщо говорити «неформально», базуються на ідеї мінімізації квадратичної функції за скінченну кількість кроків. Визначимо метод формально.

Мінімізуємо квадратичну функцію

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle ,$$

де A – симетрична додатно визначена матриця розміру $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Суть методу спряжених напрямів полягає в знаходженні таких напрямів h^0, h^1, $\ldots$, h^{n-1}, що послідовність одновимірних мінімізацій уздовж h^j $(j = 1, 2 \ldots, n-1)$ мінімізує функцію f, тобто

$$f(x^n) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

де послідовність x^k, $0 \le k \le n$ визначають рекурентно:

$x^0 \in \mathbb{R}$ – довільне число;
$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $f(x^k + \alpha_k h^k) = \min\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x^k + \alpha h^k)$ $(0 \le k \le n)$.

Указану властивість має система напрямів $h^0, \ldots, h^{n-1}$, *взаємно (попарно) спряжених* відносно матриці A, тобто:

$$\left\langle Ah^i, h^j \right\rangle = 0 \quad \text{при } i \ne j.$$

Конкретні алгоритми мінімізації базуються на способах побудови системи взаємно спряжених напрямів.

У методі *спряжених напрямів першого порядку* система взаємно спряжених напрямів будується за правилом:

$$h^0 = -f'(x^0);$$
$$h^k = -f'(x^k) + \beta_{k-a} h^{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\langle f'(x^k), Ah^{k-1} \rangle}{\langle h^{k-1}, Ah^{k-1} \rangle}. \tag{4.1}$$

Відомо (див., наприклад, [3]), що побудовані за співвідношеннями (4.1) вектори $h^0, \ldots, h^{n-1}$ взаємно спряжені, а градієнти $f'(x^0), \ldots, f'(x^{n-1})$ попарно ортогональні. Метод спряжених градієнтів (як окремий випадок методу спряжених напрямів) забезпечує відшукання точки мінімуму функції f не пізніше ніж на n-му кроці.

4.2. Завдання до лабораторної роботи

1. У табл. 1.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з градієнтних методів. Конкретний тип градієнтного методу обрати самостійно, ураховуючи особливості функції f (наприклад, ярність). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

Під час складання програми треба:

– обчислити цільову функцію в окремій підпрограмі;

– частинні похідні цільової функції обчислити числово.

3. Знайти мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета числової оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом ученихматематиків під керівництвом академіка НАН України Б. М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

4.3. Додаткові завдання до лабораторної роботи

1. Застосувати метод найшвидшого спуску до двовимірної квадратичної функції $f(x)$ для різних початкових наближень:

1) $f(x) = x_1 + ax_2$;

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3$.

Параметр a задає користувач з вимогою $a \gg 1$ (a набагато більше за одиницю).

2. Застосувати метод найшвидшого спуску до тривимірної квадратичної функції $f(x)$ $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Лабораторна робота 5

Елементи теорії оптимального керування

5.1. Теоретичні відомості

5.1.1. Постановка задачі

Нехай рух керованого об'єкта описується системою диференціальних рівнянь
$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{5.1}$$
де $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор координат об'єкта (або *вектор фазових координат*); $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – задана функція; $u = (u_1, \ldots, u_r)$ – вектор керувань (або просто *керування*). У рівнянні (5.1) вектори x та u – функції змінної t, яка означає час, причому $t \in [t_0, T]$; тут і надалі $[t_0, T]$ – відрізок часу, на якому відбувається керування. На керування, зазвичай, додатково накладається умова
$$u(t) \in U(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{5.2}$$
де $U(t)$ при кожному $t \in [t_0, T]$ – задана множина в $\mathbb{R}^r$.

Векторну (r-вимірну) функцію u називають *керуванням*, якщо вона кусково-неперервна на $[t_0, T]$ (тобто u має на $[t_0, T]$ скінченну кількість розривів першого роду і не має розривів другого роду), неперервна справа у точках розриву та неперервна в точці T. Керування u називають *допустимим*, якщо воно додатково задовольняє обмеження (5.2).

Нехай функція u має стрибки (розриви першого роду) в точках $\tau_1, \ldots, \tau_k$, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < T$. Розглянемо задачу Коші
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le T, \quad x(t_0) = x^0. \tag{5.3}$$

Припустимо, що задача (5.3) має розв'язок x, визначений на відрізку часу $[0, \tau_1]$, причому $x(\tau_1) = x^1$. Далі розглянемо задачу Коші
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(\tau_1) = x^1.$$

Припускаючи, що ця задача має розв'язок на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$, причому $x(\tau_2) = x^2$, переходимо до задачі

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(\tau_2) = x^2 \quad \text{і т. д.}$$

Функцію x, яку вдається визначити вказаним способом на всьому відрізку $[t_0, T]$, називатимемо розв'язком задачі Коші (5.3) або *фазовою траєкторією*, що відповідає керуванню u. Функція x за побудовою неперервна на $[t_0, T]$ та задовольняє для всіх $t \in [t_0, T]$ рівність:

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau.$$

Теорема 5.1 (існування). *Нехай вектор-функція f визначена та неперервна за сукупністю аргументів на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, T]$ і задовольняє умову Ліпшіца за x з деякою константою $M > 0$:*

$$\|f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)\| \leq M\|x - \hat{x}\|, \quad x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r, \ t \in [t_0, T].$$

Тоді для довільного $x^0 \in \mathbb{R}^n$ та довільного кусково-неперервного керування u задача (5.3) має єдиний розв'язок, визначений на всьому відрізку $[t_0, T]$.

Загальна постановка задачі оптимального керування передбачає систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{5.4}$$

яка описує рух деякого керованого об'єкта, що підпорядкований таким умовам:

$$x(t_0) \in S_0 \text{ -- початкові умови;} \tag{5.5}$$
$$x(T) \in S_T \text{ -- кінцеві умови;} \tag{5.6}$$
$$t_0 \in \Theta_0 \text{ -- умови на початковий момент часу;} \tag{5.7}$$
$$T \in \Theta_1 \text{ -- умови на кінцевий момент часу;} \tag{5.8}$$
$$x(t) \in X(t), \ t \in [t_0, T] \text{ -- фазові обмеження;} \tag{5.9}$$
$$u(t) \in U(t), \ t \in [t_0, T] \text{ -- обмеження на керування,} \tag{5.10}$$

де S_0, S_T, $X(t)$, $U(t)$ – задані множини при кожному $t \in [t_0, T]$.

За *цільовий функціонал* (аналог цільової функції в задачах оптимізації) береться

$$J(u, x_0, t_0, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(t_0, x_0, x(T), T), \tag{5.11}$$

який є сумою *інтегрального функціонала* $\int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt$ і *термінального функціонала* $\Phi(t_0, x_0, x(T), T)$. Ця задача в загальній формі називається *задачею Больца*. Задача керування, що містить лише інтегральний функціонал (термінальний функціонал є тотожним нулем) називається *задачею Лагранжа*; задача, що містить лише термінальний функціонал (інтегральний функціонал є тотожним нулем) називається *задачею Майєра*. Задача з інтегральним функціоналом при $f_0 \equiv 1$ називається *задачею оптимальної швидкодії*.

Отже, задача оптимального керування формулюється як задача мінімізації функціонала (5.11) за обмежень (5.4)–(5.10). Під мінімізацією функціонала розуміють таке:

- за фіксованих t_0, $x_0 = x(t_0)$ та допустимого керування u траєкторія x керованого об'єкта визначається однозначно; таким чином, однозначно визначається і значення цільового функціонала $J(u, x_0, t_0, T, x(T))$;
- кожне допустиме керування u переводить точку x_0 у деяку іншу точку $x(T)$;
- потрібно з усіх можливих t_0, T $(t_0 \leq T)$, x_0, $x(T)$ та з усіх допустимих керувань $u \in U$, що переводять точку x_0 у точку $x(T)$ за обмежень (5.4)–(5.10), вибрати такі моменти t_0 та T, такі координати x_0 та $x(T)$ і таке керування u, що надають функціоналу (5.11) найменшого можливого значення.

Керування $\tilde{u}(t)$, яке є розв'язком цієї задачі, називають *оптимальним керуванням*, а відповідну йому траєкторію $\tilde{x}(t)$ – *оптимальною траєкторією*.

5.1.2. Принцип максимуму Понтрягіна (основна теорема)

Основний результат теорії оптимального керування – принцип максимуму Понтрягіна, який указує необхідні умови оптимальності в задачах цього класу.

Розглянемо дещо спрощену задачу:

$$\begin{cases} J(u,T,x(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T),T) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t); \\ x(t_0) = x_0; \\ g_k(x(T),T) = 0 \ (k = \overline{1,m}); \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{5.12}$$

де $g_k : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,m})$ – задані функції, $S_0 = \{x_0\}$, $x(T) \in S_T = \{\xi \in \mathbb{R}^n : g_k(\xi,T) = 0,\ k = \overline{1,m}\}$, множина U не залежить від часу, фазових обмежень немає.

Для формулювання принципу максимуму Понтрягіна вводиться так звана *функція Гамільтона*:

$$H(x,u,t,a_0,\psi) = -a_0 f_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x,u,t),$$

де $a_0 = \mathrm{const}$, $\psi(t) = (\psi_1(t),\dots,\psi_n(t))$. Система лінійних рівнянь відносно змінних $\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)$

$$\dot{\psi} = -H'_x \tag{5.13}$$

називається *спряженою системою*, що відповідає траєкторії x і керуванню u (використовуємо зручне скорочення $H'_x = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right)$). Система (5.13) в координатній формі має вигляд

$$\dot{\psi}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t),u(t),t) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t),u(t),t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 5.2. *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n, Φ, g_1, ..., g_m мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t_0 \le t \le T$. Нехай $(\tilde{u},\tilde{x},\tilde{T})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.12). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \ge 0$, a_1, $\dots a_m$ такі, що $a_0 + |a_1| + \dots + |a_m| \ne 0$, причому виконуються такі умови:*

– *умова максимуму: при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t))$ досягає максимуму за u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t)); \tag{5.14}$$

– *перша умова трансверсальності на правому кінці*

$$\psi(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) - \sum_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \tag{5.15}$$

– *друга умова трансверсальності на правому кінці*

$$\begin{gathered} \max_{u \in U} H(\tilde{x}(\tilde{T}), u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = \\ = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) + \sum_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}). \end{gathered} \tag{5.16}$$

5.1.3. Схема застосування принципу максимуму Понтрягіна

Застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна, можна користуватись такою схемою (задача (5.12)).

1. Використовуючи умову максимуму (5.14), знаходять «підозріле на оптимальність» керування $\tilde{u}(t)$ як функцію v, що залежить від додаткових параметрів $x(t)$, a_0 та $\psi(t)$:

$$\begin{gathered} H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{u}(t) = v(t, x(t), a_0, \psi(t)). \end{gathered}$$

2. Виписують систему $2n$ диференціальних рівнянь, що включає n рівнянь вихідного об'єкта (5.4) та n рівнянь спряженої системи (5.13) (замість $\tilde{u}$ підставляють вираз v):

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}; \\ \dot{\psi}_i(t) &= a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ & \quad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5.17}$$

Загальним розв'язком системи (5.17) буде «підозріла на оптимальність» траєкторія $\tilde{x}$ та відповідна вектор-функція ψ, які додатково залежать від $2n$ констант інтегрування та від параметра a_0.

3. Константи інтегрування, що виникають під час розв'язання системи (5.17) ($2n$ констант), знаходять спільно із параметрами a_0, a_1, $\ldots$, a_m та кінцевим моментом $\tilde{T}$, використовуючи умови трансверсальності (5.15) та (5.16), умови на закріпленому за умовами задачі лівому кінці ($x(t_0) = x_0$), а також умови $g_k(x(\tilde{T}), \tilde{T}) = 0$ ($k = \overline{1, m}$) на правому кінці:

$$\begin{cases} \psi_i(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_{x_i}(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) - \sum\limits_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_{x_i}(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}), \quad i = \overline{1, n}; \\ H(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{u}(\tilde{T}), \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1, n}; \\ g_k(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{5.18}$$

Система (5.18) містить $2n + m + 1$ алгебричних рівнянь та $2n + m + 2$ невідомих, тобто для повного розв'язання системи (5.18) не вистачає одного рівняння.

4. Додаткову умову для розв'язання (5.18) отримують, використовуючи так звану *однорідність* функції Гамільтона відносно a_0 та ψ:

$$H(x, u, t, \alpha a_0, \alpha\psi) = \alpha H(x, u, t, a_0, \psi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо:

$$v(t, x(t), \alpha a_0, \alpha\psi(t)) = \alpha v(t, x(t), a_0, \psi(t)), \quad \forall \alpha > 0,$$

де $v(t, x(t), a_0, \psi(t))$ – розв'язок умови максимуму (5.14). Умови трансверсальності (5.15) та (5.16) також однорідні щодо $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та ψ. Отже, якщо деякий набір параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та вектор ψ задовольняють умови теореми 5.2, то ці умови також задовольняються набором $\alpha a_0, \alpha a_1, \ldots, \alpha a_m$ та вектором $\alpha\psi$ за будь-якого $\alpha > 0$. Тому параметри $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та вектор ψ визначають теоремою 5.2 лише з точністю до додатного множника, і цей множник можна обирати довільно. Це дозволяє запровадити певне нормування, наприклад (ураховуючи, що параметри $a_0, a_1, \ldots, a_m$ одночасно не дорівнюють нулю):

$$\sum_{k=0}^{m} a_k^2 = 1.$$

Досить часто вдається довести додатність a_0 і тоді можна застосувати більш зручне нормування:

$$a_0 = 1.$$

Отже, застосування принципу максимуму Понтрягіна фактично зводиться до розв'язання задачі Коші (5.17), (5.18), яку часто називають *крайовою задачею принципу максимуму*. Розглянемо крайову задачу принципу максимуму для найпоширеніших режимів обмежень для кінцевого моменту часу та правого кінця траєкторії.

5.2. Деякі типи обмежень на правому кінці траєкторії

5.2.1. Фіксований кінцевий момент часу та закріплений правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T фіксований, тобто $T = T_0$, та правий кінець траєкторії $x(T)$ закріплений, тобто $x(T) = x_T$. Цей режим передбачає $n+1$ обмеження, які можна реалізувати такими функціями g_k:

$$g_1(\xi, T) = \xi_1 - (x_T)_1, \ \ldots, \ g_n(\xi, T) = \xi_n - (x_T)_n, \quad g_{n+1}(\xi, T) = T - T_0.$$

Отже, розглядаємо таку задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u) = \int\limits_{t_0}^{T_0} f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \\ x(t_0) = x_0; \\ x(T_0) = x_T; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T_0 \end{cases} \tag{5.19}$$

(додаток $\Phi(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) = \Phi(x_T, T_0)$ у цьому режимі є константою, і його можна не враховувати).

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$\psi(T_0) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$
$$\max_{u \in U} H(\tilde{x}(T_0), u, T_0, a_0, \psi(T_0)) = a_{n+1}.$$

Отже, параметри $a_1, \dots, a_n$ визначають з першої умови трансверсальності, а параметр a_{n+1} – з другої умови трансверсальності:

$$\begin{aligned} a_k &= -\psi_k(T_0), \quad k = \overline{1,n}; \\ a_{n+1} &= \max_{u \in U} H(x_T, u, T_0, a_0, \psi(T_0)) \end{aligned} \tag{5.20}$$

(нагадаємо, що a_0 можна зафіксувати нормуванням, наприклад, $a_0 = 1$ при $a_0 > 0$).

Тепер, ураховуючи той факт, що параметри $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ трапляються лише в умовах трансверсальності, можемо вилучити їх із крайової задачі максимуму разом з умовами трансверсальності. Отже, крайова задача принципу максимуму набуває досить простого вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1,n}; \\ \dot{\psi}_i(t) &= a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ & \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1,n}; \\ x_k(t_0) &= (x_0)_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ x_k(T_0) &= (x_{T_0})_k, \quad k = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, можна обчислити параметри $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ з умов (5.20). Однак для розв'язання цієї задачі оптимального керування параметри $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ не потрібні.

Тепер розглянемо можливі варіанти нормування параметрів, для чого виділимо два випадки.

1. $a_0 = 0$. У цьому випадку з (5.20) отримуємо

$$|\psi_1(T_0)| + |\psi_2(T_0)| + \dots + |\psi_n(T_0)| \neq 0$$

(інакше $a_0 + |a_1| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}| = 0$, що суперечить умові теореми 5.2). Крім того, із спряженої системи бачимо, що вектор ψ_k ($k = \overline{1,n}$) при $a_0 = 0$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x} f_j(x(t), u(t), t).$$

Але тоді рівність $\psi(T_0) = 0$ тягне тотожність $\psi \equiv 0$. Отже, при $a_0 = 0$ можна гарантувати виконання умови

$$|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \dots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0].$$

2. $a_0 > 0$. У цьому випадку, як уже зазначалось, можна вибрати зручне нормування $a_0 = 1$.

Отже, в обох розглянутих випадках (тобто для будь-якого $a_0 \geq 0$) виконується така умова:

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0], \tag{5.21}$$

яка зараз еквівалентна умові $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| \neq 0$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для цього часткового випадку.

Наслідок 1 (фіксований T та закріплений $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом з цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.19). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і число $a_0 \geq 0$ такі, що*

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконується умова максимуму

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t)).$$

5.2.2. Фіксований кінцевий момент часу та вільний правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T фіксований, тобто $T = T_0$, а правий кінець траєкторії $x(T)$ вільний, тобто жодного обмеження на $x(T)$ не встановлено. Цей режим передбачає одне обмеження, яке можна реалізувати такою функцією g_1:

$$g_1(\xi, T) = T - T_0.$$

Отже, розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u, x(T_0)) = \int\limits_{t_0}^{T_0} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T_0)) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \\ x(t_0) = x_0; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T_0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$\psi(T_0) = -a_0\Phi'(\tilde{x}(T_0));$$
$$H(\tilde{x}(T_0), \tilde{u}(T_0), T_0, a_0, \psi(T_0)) = a_1.$$

Отже, параметр a_1 знаходимо з другої умови трансверсальності

$$a_1 = H(\tilde{x}(T_0), \tilde{u}(T_0), T_0, a_0, \psi(T_0)). \tag{5.23}$$

Тепер, оскільки параметр a_1 міститься лише в другій умові трансверсальності, можемо вилучити його із крайової задачі максимуму разом з другою умовою трансверсальності. Отже, крайова задача принципу максимуму набуває досить простого вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}; \\ \dot{\psi}_i(t) &= a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ & \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}; \\ x_k(t_0) &= (x_0)_k, \quad k = \overline{1, n}; \\ \psi(T_0) &= -a_0\Phi'(x(T_0)). \end{cases}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, параметр a_1 можна обчислити з умови (5.23). Однак для розв'язання такої задачі оптимального керування параметр a_1 не потрібен.

Аналогічно попередньому випадку (фіксований T та закріплений $x(T)$) неважко довести, що в цьому режимі також виконується умова (5.21), яку зручно використовувати під час нормування параметрів:

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \dots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0]$$

(еквівалентно умові $a_0 + |a_1| \neq 0$). Більш того, у цьому випадку гарантовано $a_0 > 0$, інакше з першої умови трансверсальності отримали б $\psi(T_0) = 0$. Таким чином, можемо прийняти $a_0 = 1$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для цього окремого випадку.

Наслідок 2 (фіксований T та вільний $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n, Φ мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$,*

$t_0 \le t \le T_0$. *Нехай* $(\tilde{u}, \tilde{x})$ *– розв'язок задачі оптимального керування* (5.22). *Тоді існує розв'язок* ψ *спряженої системи* (5.13), *який відповідає керуванню* $\tilde{u}$ *та траєкторії* $\tilde{x}$, *і число* $a_0 > 0$ *(можна вибрати довільним додатним, наприклад,* $a_0 = 1$*) такі, що виконуються умови:*

– *умова максимуму:*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), T, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, T, a_0, \psi(t));$$

– *перша умова трансверсальності:*

$$\psi(T_0) = -a_0 \Phi'(\tilde{x}(T_0)).$$

5.2.3. Вільний кінцевий момент часу та закріплений правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T вільний, тобто жодного обмеження на T не встановлено, а правий кінець траєкторії $x(T)$ закріплений, тобто $x(T) = x_T$. Цей режим передбачає n обмежень, які можна реалізувати такими функціями g_k:

$$g_1(\xi, T) = \xi_1 - (x_T)_1, \ \ldots, \ g_n(\xi, T) = \xi_n - (x_T)_n.$$

Отже, розглядаємо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} J(u,T) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(T) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \\ x(t_0) = x_0; \\ x(T) = x_T; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5.24}$$

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$\psi(\tilde{T}) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$
$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'(\tilde{T}).$$

Отже, параметри $a_1, \ldots, a_n$ визначають з першої умови трансверсальності:

$$a_k = -\psi_k(\tilde{T}), \quad k = \overline{1, n} \tag{5.25}$$

(нагадаємо, що a_0 можна зафіксувати нормуванням, наприклад, $a_0 = 1$ при $a_0 > 0$). Тепер, оскільки параметри $a_1, \ldots, a_n$ трапляються лише в першій умові трансверсальності, можемо вилучити їх із крайової задачі максимуму разом з першою умовою трансверсальності. Отже, крайова задача принципу максимуму набуває досить простого вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1,n}; \\ \dot{\psi}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1,n}; \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ x_k(T) = (x_T)_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ \max\limits_{u \in U} H(x_T, u, T, a_0, \psi(T)) = a_0 \Phi'(T). \end{cases}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, параметри $a_1, \ldots, a_n$ можна обчислити з умов (5.25). Однак для розв'язання цієї задачі оптимального керування параметри $a_1, \ldots, a_n$ не потрібні.

Легко перевірити, що цього разу також виконується умова (5.21), яку зручно застосовувати під час нормування параметрів:

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0]$$

(еквівалентно умові $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| \neq 0$).

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для наведеного випадку.

Наслідок 3 (вільний T та закріплений $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, …, f_n, Φ мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \le T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.24). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \ge 0$, a_1, …a_n такі, що*

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконуються:

– *умова максимуму: при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t))$ досягає максимуму за u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t));$$

– *друга умова трансверсальності на правому кінці:*

$$\max_{u\in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0\Phi'(\tilde{T}).$$

5.2.4. Вільний кінцевий момент часу та вільний правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T та правий кінець траєкторії $x(T)$ вільні, тобто жодного обмеження на T та $x(T)$ не встановлено. Цей режим не передбачає обмежень, і функцій g_k зараз немає ($m = 0$).

Отже, розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u, T, x(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T), T) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \\ x(t_0) = x_0; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5.26}$$

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$\psi(\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T});$$
$$\max_{u\in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0\Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}).$$

Отже, крайова задача принципу максимуму набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}; \\ \dot{\psi}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}; \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1, n}; \\ \psi(\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \\ \max\limits_{u\in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0\Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}). \end{cases}$$

За цього режиму існує лише один параметр $a_0 \ge 0$ і за умовою теореми 5.2 отримуємо: $a_0 > 0$. Отже, з міркувань нормування, можемо вибрати єдиний параметр a_0 довільним додатним числом, наприклад, $a_0 = 1$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для цього окремого випадку.

Наслідок 4 (вільні T та $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n, Φ мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.26). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \geq 0$, a_1, ... a_n такі, що*

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall t \in [0, T_0],$$

причому виконуються:

- *умова максимуму: при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t))$ досягає максимуму за u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t));$$

- *перша умова трансверсальності на правому кінці:*

$$\psi(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T});$$

- *друга умова трансверсальності на правому кінці:*

$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}).$$

5.2.5. Загальні зауваження

У вищенаведеному матеріалі було розглянуто два типи обмежень на правий кінець траєкторії – відсутність обмежень на $x(T)$ та жорстка фіксація ($x(T) = x_T$). Тут слід зробити три зауваження.

Зауваження 5.1. Часто трапляється комбінація розглянутих обмежень на $x(T)$, тобто деякі координати $x(T)$ закріплені, а інші вільні:

$$x_i(T) = (x_T)_i, \quad i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}.$$

У цьому разі до закріплених координат $x_i(T) = (x_T)_i$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_k$ можна застосувати схему, запропоновану для закріпленого кінця траєкторії, тобто відповідні умови трансверсальності разом з відповідними параметрами вилучаються із крайової задачі (5.17), (5.18) (див. підрозд. 5.3, приклад 5.3).

Зауваження 5.2. Очевидно, що випадками жорсткого закріплення та повної свободи не вичерпуються всі можливі обмеження на правому кінці траєкторії. Зокрема, у задачі може існувати нетривіальний функціональний зв'язок між кінцем траєкторії $x(T)$ і моментом часу T, тобто одна або декілька функцій обмеження $g_k(\xi, T)$ можуть суттєво залежати від обох змінних (див. підрозд. 5.3, приклад 5.4).

Зауваження 5.3. Схема застосування принципу максимуму, запропонована в підрозд. 5.1.3, має лише загальнорекомендаційний характер. Іноді можна прискорити розв'язання задачі, якщо відступити від запропонованої схеми. Так, якщо спряжена система не містить векторів x та u (це можливо, якщо система (5.4), що описує об'єкт, лінійна), доцільно спочатку знайти загальний розв'язок спряженої системи (5.13), а вже потім, використовуючи знайдений вираз для $\psi(t)$, переходити до загальної схеми.

5.3. Приклади розв'язання задач оптимального керування

Приклад 5.1. Нехай точка рухається по прямій за законом

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T$$

за фіксованих $x(0)$ та $x'(0)$. Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початкового положення в початок координат за мінімальний час T. При цьому швидкість точки в кінці траєкторії повинна бути нульовою, а керування має задовольняти умову:

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, T].$$

Застосуємо до задачі принцип максимуму Понтрягіна. Спочатку позбавимось другої похідної, увівши двовимірний вектор фазових змінних: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тепер рух керованого об'єкта можна описати системою диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

Початкове положення $x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ при $t_0 = 0$ та кінцеве положення $x(T) = (0, 0)$ за умовою задачі фіксовані, а кінцевий момент часу T незакріплений, тобто маємо випадок, розглянутий в підрозд. 5.2.2. У цій задачі $U = [-1, 1]$, $f_0 \equiv 1$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = -a_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Спряжена система має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -H'_{x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -H'_{x_2} = -\psi_1. \end{aligned}$$

Як зазначалось у підрозд. 5.2.2, у цьому випадку можна не використовувати першу умову трансверсальності (вилучивши відповідні параметри). Друга умова трансверсальності для цієї задачі має вигляд

$$-a_0 + \psi_1(T)x_2(T) + \psi_2(T)u(T) = 0. \tag{5.27}$$

Отже, крайова задача принципу максимуму набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{\psi}_1(t) = 0; \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1; \\ x_k(0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1,2}; \\ x_k(T) = 0, \quad k = \overline{1,2}; \\ -a_0 + \psi_1(T)x_2(T) + \psi_2(T)\tilde{u}(T) = 0, \end{cases}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона:

$$-a_0 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u \in U}(-a_0 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u).$$

Оскільки тепер спряжена система має дуже простий вигляд, не містить x та ψ і допускає явний запис загального розв'язку, є сенс дещо відступити від загальної схеми і спочатку виписати загальний розв'язок спряженої системи, а вже потім шукати оптимальне керування з умови максимізації функції Гамільтона (див. зауваження 5.3). Загальний розв'язок спряженої системи можна записати в явному вигляді:

$$\psi_1(t) = C; \quad \psi_2(t) = -Ct + D,$$

де C, D – константи інтегрування.

Беручи до уваги умову нормування (5.21), розглянемо випадок $|C| + |D| \neq 0$ (інакше, із (5.27) отримаємо $a_0 = 0$, що суперечить умові (5.21)). Максимум функції H по $u \in U$ досягається лише за такого керування $\tilde{u}$, яке задовольняє умову:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 0; \\ -1, & \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що при $\psi_2(t) = 0$ керування $\tilde{u}(t)$ може набувати довільного значення. Проте, ураховуючи вимогу неперервності u справа, а також умову $\psi_2(t) \not\equiv 0$ ($\psi_2(t) \equiv 0 \Rightarrow C = D = 0$) отримуємо, що $\tilde{u}(t) \in \{-1, 1\}$ і при $\psi_2(t) = 0$.

Отже, оптимальне керування може набувати лише двох значень $u(t) \in \{-1, 1\}$ для всіх $t \in [0, T]$. Далі, завдяки лінійності ψ_2, оптимальне керування $\tilde{u}$ може мати не більше однієї «точки перемикання» – точки розриву, де функція $\tilde{u}$ змінює знак.

Далі, як приклад, розглянемо конкретну початкову умову: $x^0 = (1, 0)$.

Легко переконатись, що функції керування $u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_1; \\ -1, & t_1 \le t \le T, \end{cases}$ $u(t) \equiv 1$ та $u(t) \equiv -1$ не можуть перевести точку $x(t)$ з положення $(1, 0)$ в $(0, 0)$, тобто оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ повинно мати точку перемикання $t_1 \in (0, T)$ із -1 в 1:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < t_1; \\ 1, & t_1 \le t \le T. \end{cases}$$

Такому керуванню та початковим умовам $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ відповідає траєкторія:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < t_1; \\ \frac{t^2}{2} - 2t_1 t + t_1^2 + 1, & t_1 \le t \le T; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t < t_1; \\ t - 2t_1, & t_1 \le t \le T. \end{cases}$$

З умов $x_1(T) = x_2(T) = 0$ знаходимо: $T = \widetilde{T} = 2$, $t_1 = \frac{\widetilde{T}}{2} = 1$ (система має також розв'язок $t_1 = -1$, $T = -2$, який відкидаємо, оскільки від'ємний час не відповідає вимогам задачі).

Отже, принцип максимуму дозволяє лише одне оптимальне керування:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1; \\ \ \ 1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Існування оптимального керування можна довести, розглянувши фізичну суть задачі (зараз не будемо цього робити). Отже, оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ існує, воно єдине і йому відповідає така оптимальна траєкторія:

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1; \\ \frac{(t-2)^2}{2}, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t < 1; \\ t - 2, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Відповідні графіки наведені на рис. 5.1.

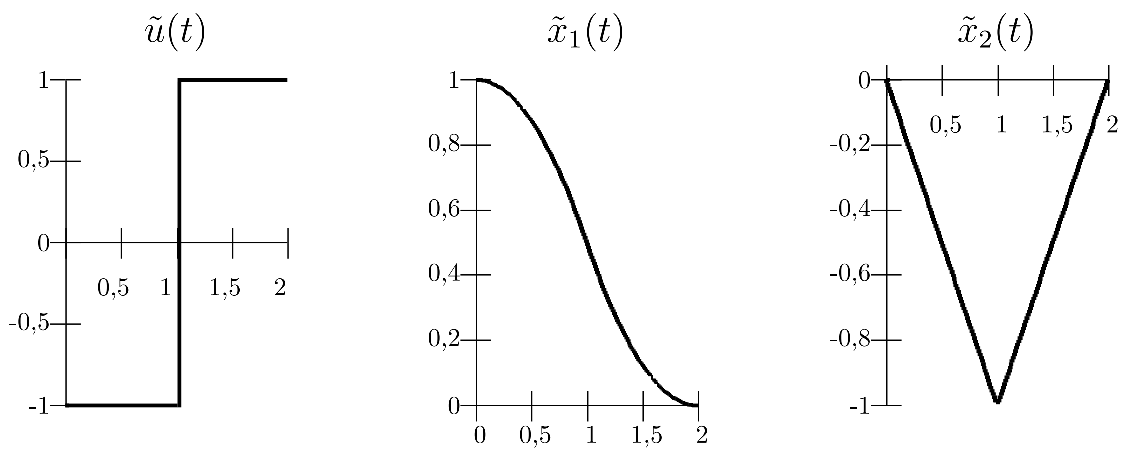

Рис. 5.1

Цікаво, що для розв'язання задачі, тобто для знаходження оптимального керування $\tilde{u}$ та відповідної траєкторії $\tilde{x}$, константи C та D не обчислювали, а знайшли лише точку перемикання $t_1 = T/2 = 1$, яка визначає зв'язок між C та D:

$$\psi_2(t_1) = 0 \Leftrightarrow -C + D = 0 \Leftrightarrow C = D.$$

Додаткове рівняння для обчислення C та D надається другою умовою трансверсальності (5.27):

$$-a_0+\psi_1(\widetilde{T})x_2(\widetilde{T})+\psi_2(\widetilde{T})\tilde{u}(\widetilde{T})=0 \Leftrightarrow -a_0+(-C\widetilde{T}+D)\tilde{u}(\widetilde{T})=0 \Leftrightarrow a_0=-C.$$

($\tilde{u}(\tilde{T})=1$, оскільки функція $\tilde{u}$ зростає від $\tilde{u}(0)=-1$ до $\tilde{u}(\widetilde{T})=1$ і має лише одну точку перемикання $t_1=\frac{\widetilde{T}}{2}$).

Отже, як і слід було чекати, параметр $a_0=-C$ та функції $\psi_1(t)=C$ і $\psi_2(t)=-C(t-1)$ визначені з точністю до додатного множника $-C$ (зазначимо, що $C<0$, оскільки $\psi_2(t)=-C(t-1)$ має зростати).

Приклад 5.2. Нехай, як і в попередньому прикладі, точка рухається по прямій за законом

$$\ddot{x}(t)=u(t), \quad 0\le t\le T,$$

початкове положення та швідкість фіксовані: $x'(0)=0$, $x(0)=0$.

Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початку координат у положення $x(T)=1$, $\dot{x}(T)=0$, мінімізучи функціонал

$$J(u)=\int\limits_0^T u^2(t)dt.$$

Кінцевий момент T – фіксований.

Як і в попередньому прикладі, позбавимось другої похідної, увівши двовимірний вектор фазових змінних $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=u.\end{aligned}$$

Початкове положення $x(0)=(0,0)$, правий кінець $x(T)=(1,0)$ та кінцевий момент T за умовою задачі фіксовані, тобто маємо випадок, розглянутий в підрозд. 5.2.1. У цій задачі $U=\mathbb{R}$, $f_0(x(t),u(t),t)=u(t)$, $\Phi\equiv 0$. Функція Гамільтона та спряжена система мають вигляд

$$H(x,u,T,a_0,\psi)=-a_0u^2+\psi_1x_2+\psi_2u, \qquad \begin{cases}\dot{\psi}_1=0,\\ \dot{\psi}_2=-\psi_1.\end{cases}$$

Отже, крайова задача принципу максимуму має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{\psi}_1(t) = 0; \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t); \\ x_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \\ x_1(T) = 1, \ x_2(T) = 0, \end{cases}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюють з умови максимізації функції Гамільтона

$$-a_0\tilde{u}(t)^2 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u\in\mathbb{R}}(-a_0u^2 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u).$$

Запишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$$\psi_1(t) = C; \quad \psi_2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум за u лише при тих t, коли $\psi_2(t) = 0$, тобто $\psi_2 \equiv 0$, $\psi_1 = -\dot{\psi}_2 \equiv 0$, що суперечить умові (5.21). Отже, $a_0 > 0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при $\tilde{u}(t) = \frac{\psi_2(t)}{2} = \frac{-Ct+D}{2}$. Такому керуванню за початкових умов $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ відповідає траєкторія

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{Ct^3}{12} + \frac{Dt^2}{4}; \\ x_2(t) = -\frac{Ct^2}{4} + \frac{Dt}{2}. \end{cases}$$

Константи C та D знаходимо з умов на правому кінці інтервалу:

$$\begin{cases} x_1(T) = -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = 0; \\ x_2(T) = -\frac{CT^2}{4} + \frac{DT}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{24}{T^3}; \\ D = \frac{12}{T^2}. \end{cases}$$

Отже, отримуємо оптимальне керування та відповідну траєкторію:

$$\tilde{u}(t) = -\frac{12t}{T^3} + \frac{6}{T^2};$$
$$\tilde{x}_1(t) = -\frac{2t^3}{T^3} + \frac{3t^2}{T^2};$$
$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{6t^2}{T^3} + \frac{6t}{T^2}.$$

Наведемо відповідні графіки для випадку $T = 1$ (рис. 5.2).

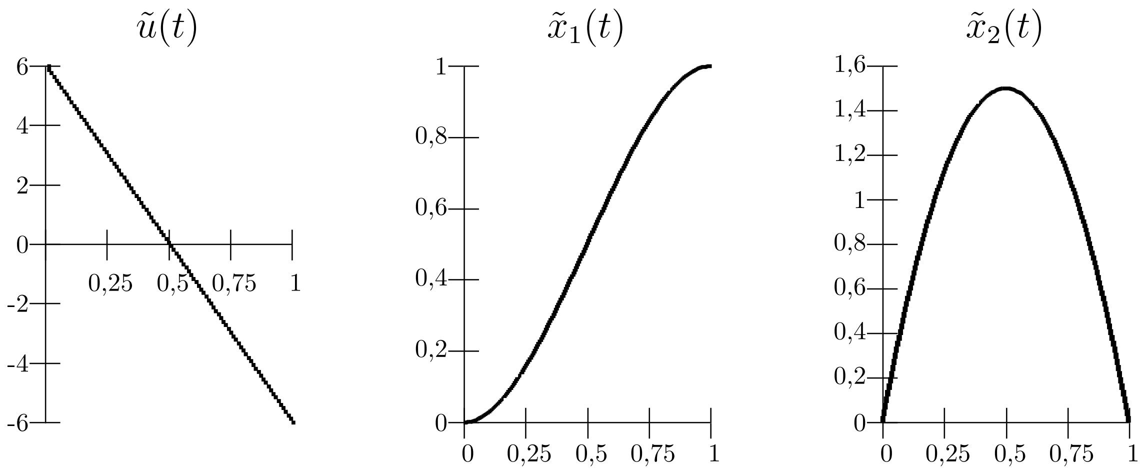

Рис. 5.2

Приклад 5.3. Нехай, як і в попередньому прикладі, точка рухається по прямій за законом

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T,$$

початкове положення та швидкість фіксовані: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початку координат у положення $x(T) = 1$ з довільною кінцевою швидкістю ($\dot{x}(T) \in \mathbb{R}$), мінімізуючи функціонал

$$J(u) = \int\limits_0^T u^2(t)dt.$$

Кінцевий момент T – фіксований.

Як і в попередньому прикладі, позбавимось другої похідної, увівши двовимірний вектор фазових змінних $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u.$$

Початкове положення та перша координата вектора $x(T)$ фіксовані: $x(0) = (0, 0)$, $x_1(T) = 1$; значення $x_2(T)$ вільне. Отже, маємо одне обмеження на правому кінці траєкторії:

$$g_1((x_1(T), x_2(T)), T) = 0,$$

де $g_1(\xi, T) = \xi_1 - 1$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Згідно із теоремою 5.2 вводимо до розгляду $a_0 \geq 0$ та $a_1 \in \mathbb{R}$ (у нашому випадку $m = 1$). Випишемо першу умову трансверсальності:

$$\psi_1(T) = -a_1; \quad \psi_2(T) = 0.$$

У цій задачі $U = \mathbb{R}$, $f_0(x(t), u(t), t) = u^2(t)$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона та спряжена система мають вигляд

$$H(x, u, T, a_0, \psi) = -a_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Отже, крайова задача (5.17), (5.18) для цього випадку має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{\psi}_1(t) = 0, \ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t); \\ x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0; \\ x_1(T) = 1; \\ \psi_1(T) = -a_1, \ \psi_2(T) = 0, \end{cases} \tag{5.28}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюють з умови максимізації функції Гамільтона

$$-a_0 \tilde{u}(t)^2 + \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) \tilde{u}(t) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (-a_0 u^2 + \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) u).$$

Як і слід було чекати (див. зауваження 5.1), параметр a_1 міститься лише в першій умові трансверсальності і його можна вилучити з розгляду разом з умовою $\psi_1(T) = -a_1$. Отже, система (5.28) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{\psi}_1(t) = 0, \ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t); \\ x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0; \\ x_1(T) = 1; \\ \psi_2(T) = 0. \end{cases}$$

Випишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$$\psi_1(t) = C, \quad \psi_2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум за u лише при тих t, коли $\psi_2(t) = 0$, тобто $\psi_2 \equiv 0$, $\psi_1 = -\dot{\psi}_2 \equiv 0$, що суперечить умові $a_0 + |a_1| \neq 0$. Отже, $a_0 > 0$ і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при $\tilde{u}(t) = \frac{\psi_2(t)}{2} = \frac{-Ct+D}{2}$. Такому керуванню за нульових початкових умов відповідає траєкторія

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{Ct^3}{12} + \frac{Dt^2}{4}; \\ x_2(t) = -\frac{Ct^2}{4} + \frac{Dt}{2}. \end{cases}$$

Константи C та D знаходимо з умови на правому кінці інтервалу та з першої умови трансверсальності:

$$\begin{cases} x_1(T) = -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = 1; \\ \psi_2(T) = -CT + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{6}{T^3}; \\ D = \frac{6}{T^2}. \end{cases}$$

Отже, отримуємо оптимальне керування та відповідну траєкторію:

$$\tilde{u}(t) = \frac{3(T-t)}{T^3};$$
$$\tilde{x}_1(t) = -\frac{t^3}{2T^3} + \frac{3t^2}{2T^2};$$
$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{3t^2}{2T^3} + \frac{3t}{T^2}.$$

Наведемо відповідні графіки для випадку $T = 1$ (рис. 5.3).

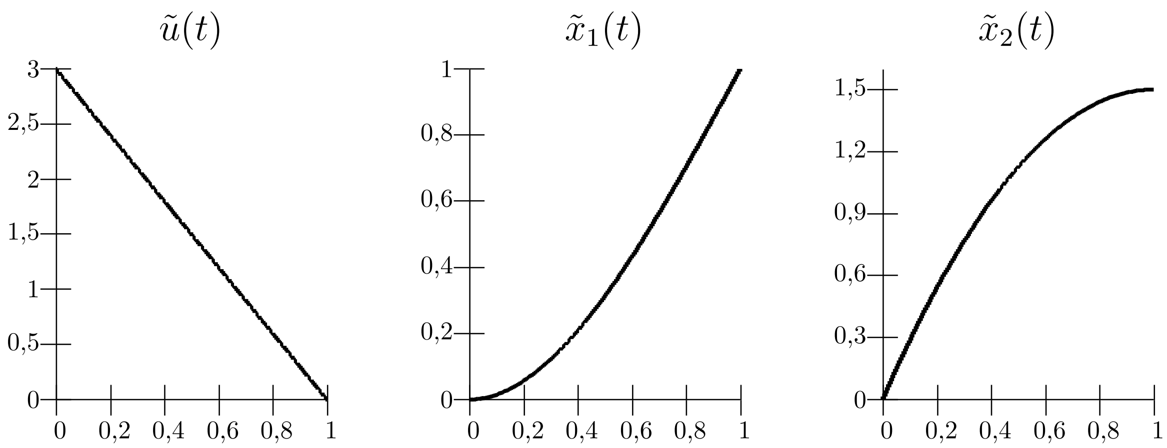

Рис. 5.3

Приклад 5.4. Розглянемо двовимірний випадок. Нехай керований об'єкт $(x(t), y(t))$ рухається на площині за законом

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u_1(t); \\ \ddot{y}(t) = u_2(t), \end{cases}$$

$0 \le t \le T$, початкове положення та швідкість фіксовані: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Потрібно в момент часу $t = T$ зустрітися з точкою $M = (r\cos wt, r\sin wt)$, мінімізуючи функціонал

$$J(u, T) = \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt + KT,$$

де $r > 0$, $w > 0$, $K > 0$ – фіксовані константи.

Швидкість об'єкта в момент зустрічі $t = T$ має дорівнювати швидкості точки M, тобто $(\dot{x}(T), \dot{y}(T)) = (-rw\sin wT,\ rw\cos wT)$. Кінцевий момент T вважаємо нефіксованим.

Як і в попередніх прикладах, позбавимось другої похідної, увівши чотиривимірний вектор фазових змінних $x_1 = x$, $\dot{x}_2 = x_1$, $y_1 = y$, $\dot{y}_2 = y_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = u_2(t). \end{cases}$$

Згідно з умовою задачі, маємо такі обмеження на правому кінці траєкторії (для зручності використовуємо двовимірну індексацію):

$$g_{i,j}((x_1(T), x_2(T), y_1(T), y_2(T)), T) = 0, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

де

$$g_{1,1}(\xi, T) = \xi_{1,1} - r\cos(wT); \quad g_{1,2}(\xi, T) = \xi_{1,2} + rw\sin(wT);$$
$$g_{2,1}(\xi, T) = \xi_{2,1} - r\sin(wT); \quad g_{2,2}(\xi, T) = \xi_{2,2} - rw\cos(wT);$$
$$\xi = (\xi_{1,1},\ \xi_{1,2},\ \xi_{2,1},\ \xi_{2,2}).$$

У цій задачі маємо: $U = \mathbb{R}^2$, $f_0(x(t), u(t), t) = u_1^2(t) + u_2^2(t)$, $\Phi((x_1(T), x_2(T), y_1(T), y_2(T)), T) = KT$.

Згідно із теоремою 5.2 уводимо до розгляду параметри $a_0 \ge 0$ та $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R}$. Функція Гамільтона для цієї задачі має вигляд

$$H(x, u, T, a_0, \psi) = -a_0(u_1^2 + u_2^2) + \psi_{1,1}x_2 + \psi_{1,2}u_1 + \psi_{2,1}y_2 + \psi_{2,2}u_2$$

(для координат вектор-функції $\psi(t) = (\psi_{1,1}(t), \psi_{1,2}(t), \psi_{2,1}(t), \psi_{2,2}(t))$ також застосовуємо двовимірну індексацію).

Випишемо спряжену систему

$$\begin{cases} \dot\psi_{1,1}(t) = 0; \quad \dot\psi_{1,2}(t) = -\psi_{1,1}(t); \\ \dot\psi_{2,1}(t) = 0; \quad \dot\psi_{2,2}(t) = -\psi_{2,1}(t). \end{cases}$$

Випишемо першу та другу умови трансверсальності:

$$\psi_{1,1}(T) = -a_{1,1}; \quad \psi_{1,2}(T) = -a_{1,2}; \quad \psi_{2,1}(T) = -a_{2,1}; \quad \psi_{2,2}(T) = -a_{2,2};$$
$$\sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2} \big(-a_0(u_1^2+u_2^2) + \psi_{1,1}(T)x_2(T) + \psi_{1,2}(T)u_1 + \\ +\psi_{2,1}(T)y_2(T) + \psi_{2,2}(T)u_2\big) = \\ = a_0K + a_{1,1}rw\sin wT + a_{1,2}rw^2\cos wT - a_{2,1}rw\cos wT + a_{2,2}rw^2\sin wT.$$

Отже, крайова задача принципу максимуму (5.17), (5.18) для цього випадку має вигляд

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t), \quad \dot y_1(t) = y_2(t); \\ \dot x_2(t) = \tilde u_1(t), \quad \dot y_2(t) = \tilde u_2(t); \\ \dot\psi_{1,1}(t) = 0, \quad \dot\psi_{1,2}(t) = -\psi_{1,1}(t); \\ \dot\psi_{2,1}(t) = 0, \quad \dot\psi_{2,2}(t) = -\psi_{2,1}(t); \\ x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = 0; \\ x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = 0; \\ x_1(T) = r\cos wT, \quad y_1(T) = r\sin wT; \\ x_2(T) = -rw\sin wT, \quad y_2(T) = rw\cos wT; \\ \psi_{1,1}(T) = -a_{1,1}, \quad \psi_{1,2}(T) = -a_{1,2}; \\ \psi_{2,1}(T) = -a_{2,1}, \quad \psi_{2,2}(T) = -a_{2,2}; \\ -a_0(\tilde u_1(T)^2 + \tilde u_2(T)^2) + \psi_{1,1}(T)x_2(T) + \psi_{1,2}(T)\tilde u_1(T) + \\ \quad +\psi_{2,1}(T)y_2(T) + \psi_{2,2}(T)\tilde u_2(T) = \\ \quad = a_0K + a_{1,1}rw\sin wT + a_{1,2}rw^2\cos wT - \\ \quad -a_{2,1}rw\cos wT + a_{2,2}rw^2\sin wT, \end{cases} \tag{5.29}$$

де оптимальне керування $\tilde u(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона

$$-a_0(\tilde u_1(t)^2+\tilde u_2(t)^2)+\psi_{1,1}(t)x_2(t)+\psi_{1,2}(t)\tilde u_1(t)+\psi_{2,1}(t)y_2(t)+\psi_{2,2}(t)\tilde u_2(t)=$$
$$=\sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2}\big(-a_0(u_1^2+u_2^2)+\psi_{1,1}(t)x_2(t)+\psi_{1,2}(t)u_1+\psi_{2,1}(t)y_2(t)+\psi_{2,2}(t)u_2\big).$$

Перша умова трансверсальності дозволяє виразити параметри $a_{i,j}$ через $\psi_{i,j}$ $(i,j\in\{1,2\})$. Підставивши в (5.29) замість $a_{i,j}$ вираз $-\psi_{i,j}(T)$ $(i,j\in\{1,2\})$, можемо вилучити параметри $a_{i,j}$ з розгляду разом з умовами $a_{i,j}=-\psi_{i,j}(T)$ $(i,j\in\{1,2\})$. Крім того, використовуючи явний вираз для $x_i(T)$, $y_i(T)$ $(i=1,2)$, можна суттєво спростити другу умову трансверсальності. Після відповідних підстановок і спрощень система (5.29) набуває вигляду

$$\begin{cases}\dot x_1(t)=x_2(t),\quad \dot y_1(t)=y_2(t);\\ \dot x_2(t)=\tilde u_1(t),\quad \dot y_2(t)=\tilde u_2(t);\\ \dot\psi_{1,1}(t)=0,\quad \dot\psi_{1,2}(t)=-\psi_{1,1}(t);\\ \dot\psi_{2,1}(t)=0,\quad \dot\psi_{2,2}(t)=-\psi_{2,1}(t);\\ x_1(0)=0,\quad y_1(0)=0;\\ x_2(0)=0,\quad y_2(0)=0;\\ x_1(T)=r\cos wT,\quad y_1(T)=r\sin wT;\\ x_2(T)=-rw\sin wT,\quad y_2(T)=rw\cos wT;\\ -a_0(\tilde u_1(T)^2+\tilde u_2(T)^2)+\psi_{1,2}(T)\tilde u_1(T)+\psi_{2,2}(T)\tilde u_2(T)=\\ \quad =a_0K-\psi_{1,2}rw^2\cos wT-\psi_{2,2}rw^2\sin wT.\end{cases}\tag{5.30}$$

Випишемо загальний розв'язок спряженої системи

$$\begin{cases}\psi_{1,1}(t)=A,\quad \psi_{1,2}(t)=-At+B,\\ \psi_{2,1}(t)=C,\quad \psi_{2,2}(t)=-Ct+D,\end{cases}\qquad A,B,C,D\in\mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0=0$. Тоді функція Гамільтона має максимум за (u_1,u_2) лише при тих t, коли $\psi_{1,2}(t)=\psi_{2,2}(t)=0$, тобто $\psi_{1,2}=\psi_{2,2}\equiv 0$. Але тоді $\psi_{1,1}=-\dot\psi_{1,2}\equiv 0$, $\psi_{2,1}=-\dot\psi_{2,2}\equiv 0$, що суперечить умові $a_0+|a_{1,1}|+|a_{1,2}|+|a_{2,1}|+|a_{2,2}|\neq 0$. Отже, $a_0>0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0=1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при

$$\tilde u_1(t)=\frac{\psi_{1,2}(t)}{2}=\frac{-At+B}{2};\quad \tilde u_2(t)=\frac{\psi_{2,2}(t)}{2}=\frac{-Ct+D}{2}.\tag{5.31}$$

Такому керуванню за початкових умов $x_1(0) = y_1(0) = 0$, $x_2(0) = y_2(0) = 0$ відповідає траєкторія

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{At^3}{12} + \dfrac{Bt^2}{4}, \quad x_2(t) = -\dfrac{At^2}{4} + \dfrac{Bt}{2}; \\ y_1(t) = -\dfrac{Ct^3}{12} + \dfrac{Dt^2}{4}, \quad y_2(t) = -\dfrac{Ct^2}{4} + \dfrac{Dt}{2}. \end{cases} \tag{5.32}$$

Константи інтегрування A, B, C, D знаходимо з умов на правому кінці траєкторії

$$\begin{cases} -\frac{AT^3}{12} + \frac{BT^2}{4} = r\cos wT; \\ -\frac{AT^2}{4} + \frac{BT}{2} = -r\sin wT; \\ -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = r\sin wT; \\ -\frac{CT^2}{4} + \frac{DT}{2} = r\cos wT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{24}{T^3}\left(\frac{rwT}{2}\sin wT + r\cos wT\right); \\ B = \frac{12}{T^2}\left(\frac{rwT}{3}\sin wT + r\cos wT\right); \\ C = \frac{24}{T^3}\left(-\frac{rwT}{2}\cos wT + r\sin wT\right); \\ D = \frac{12}{T^2}\left(-\frac{rwT}{3}\cos wT + r\sin wT\right). \end{cases}$$

Нарешті, підставивши в другу умову трансверсальності знайдені вирази для оптимального керування і траєкторії, отримуємо рівняння для знаходження кінцевого моменту T (фізичний сенс мають лише дійсні невід'ємні значення часу):

$$(KT^4 - 4r^2w^2T^2 - 36r^2 = 0) \Rightarrow (T = \sqrt{\frac{2}{K}}\sqrt{r^2w^2 + r\sqrt{w^4r^2 + 9K}}).$$

Тепер, підставивши в (5.31) та (5.32) значення для констант A, B, C, D і кінцевого моменту T, можна виписати явний вигляд для оптимального керування $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ та відповідної траєкторії $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ (не робитимемо цього, ураховуючи громіздкість остаточного виразу та ідейну очевидність цього кроку).

На завершення, наведемо графіки, які зображують координати керованого об'єкта $x_1(t), y_1(t)$ у площині (x_1, y_1) для двох різних наборів значень r, w та K (див. рис. 5.4).

$r = 1,\ w = 50,\ K = 10^7$ $\quad$ $r = 1,\ w = 90,\ K = 10^7$

$T \approx 0{,}04962$ $\quad$ $T \approx 0{,}06415$

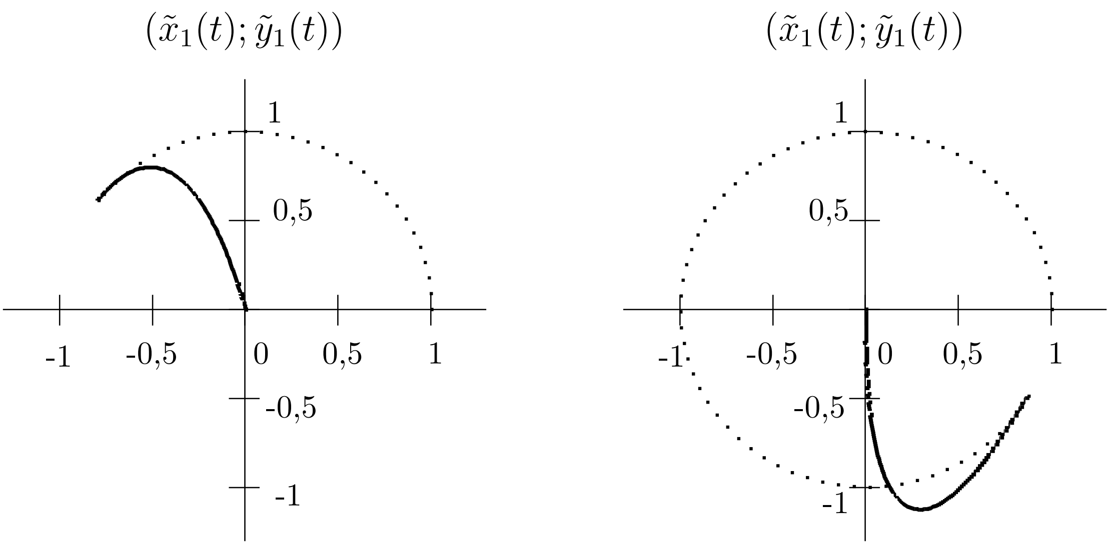

Рис. 5.4

5.4. Завдання до лабораторної роботи

1. У табл. 5.1 знайти рівняння керованого об'єкта, обмеження на керування та цільовий функціонал згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Користуючись принципом максимуму Понтрягіна, знайти траєкторії оптимального керування $\tilde{u}(t)$ та відповідні траєкторії об'єкта $\tilde{x}(t)$.

Таблиця 5.1. **Варіанти завдань до лабораторної роботи 5**

Варіант	Об'єкт	Умови на лівому кінці	Умови на правому кінці	Обмеження	Цільовий функціонал
1	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2 + T$ $x_2(T) = 4T + 1$	$\lvert u(t)\rvert \le 5$	T
2	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2 + 2T$ $x_2(T) = 6T + 2$	$\lvert u(t)\rvert \le 10$	T

Продовження табл. 5.1

3	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2 + 3T$ $x_2(T) = 10T + 1$	$\lvert u(t)\rvert \leq 15$	T
4	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2 + 4T$ $x_2(T) = 14T + 4$	$\lvert u(t)\rvert \leq 20$	T
5	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2 + 5T$ $x_2(T) = 8T + 5$	$\lvert u(t)\rvert \leq 12$	T
6	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2$	$\lvert u(t)\rvert \leq 6$	$T + (x_2(T) - 4T)^2$
7	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2$	$\lvert u(t)\rvert \leq 10$	$T + (x_2(T) - 6T)^2$
8	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2$	$\lvert u(t)\rvert \leq 15$	$T + (x_2(T) - 10T)^2$
9	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2$	$\lvert u(t)\rvert \leq 20$	$T + (x_2(T) - 14T)^2$
10	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2$	$\lvert u(t)\rvert \leq 12$	$T + (x_2(T) - 8T)^2$
11	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2 + T$	$\lvert u(t)\rvert \leq 6$	T
12	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2 + 2T$	$\lvert u(t)\rvert \leq 10$	T
13	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2 + 3T$	$\lvert u(t)\rvert \leq 15$	T
14	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2 + 4T$	$\lvert u(t)\rvert \leq 20$	T
15	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2 + 5T$	$\lvert u(t)\rvert \leq 12$	T
16	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T + 1$ $x_2(T) = 2$ T – фіксоване	—	$\int_0^T u^2(t)dt$
17	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T + 1$ $x_2(T) = 3$ T – фіксоване	—	$\int_0^T u^2(t)dt$

Продовження табл. 5.1

18	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 12T + 3$ $x_2(T) = 12$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
19	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 8T + 2$ $x_2(T) = 8$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
20	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T + 1$ $x_2(T) = 7$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
21	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T + 1$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
22	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T + 1$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
23	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 12T + 3$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
24	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 8T + 2$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
25	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T + 1$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
26	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 64$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 10$	—	$2\int\limits_0^T u^2(t)dt + 5T$
27	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 81$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 18$	—	$3\int\limits_0^T u^2(t)dt + 8T$
28	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 25$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 40$	—	$3\int\limits_0^T u^2(t)dt + 16T$

Закінчення табл. 5.1

29	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 49$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 14$	—	$5\int\limits_0^T u^2(t)dt + 17T$
30	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 36$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 18$	—	$19\int\limits_0^T u^2(t)dt + 2T$

Основні напрями вибору теми курсової роботи

1. Метод лінеаризації як один з найефективніших методів розв'язку задач математичного програмування.

2. Симплекс-метод – основний числовий метод метод розв'язку задач лінійного програмування.

3. Програмна реалізація та дослідження методів безумовної оптимізації: метод Давидона – Флетера – Пауелла для функції Розенброка.

4. Числові методи мінімізації унімодальних функцій: порівняльний аналіз.

5. Методи штрафних функцій: порівняльний аналіз.

6. Квазіньютонівські методи безумовної оптимізації.

7. Задача про знаходження відрізка мінімальної довжини, який сполучає сторони даного кута і проходить через задану точку.

8. Методи безумовної оптимізації для дослідження функцій з погано обумовленою матрицею Гессе («ярні» функції).

9. Знаходження точки у просторі, сума відстаней від якої до двох або більше заданих точок була б мінімальною.

10. Знаходження точки на одиничній кулі, сума відстаней від якої до двох або більше заданих точок була б мінімальною.

11. Прикладні задачі оптимізації (умовні та безумовні).

12. Оптимальне керування: застосування принципу максимуму Понтрягіна.

13. Потоки в мережах: знаходження оптимальних режимів.

14. Застосування методів оптимізації в диференційних іграх. Групове переслідування.

15. Багатокритеріальна оптимізація. Теорія подвійності в задачах оптимізації: лінійна та квадратична задачі.

16. Порівняльний аналіз методів дослідження функції Розенброка (одновимірний та багатовимірний випадки).

17. Побудова дуальних задач до задач лінійного та квадратичного програмування.

18. Числові методи умовної оптимізації і метод проекції градієнта.

19. Методи спряжених напрямів (з відновленням і без відновлення матриці та для квадратичної функції).

20. Методи умовної оптимізації і методи типу Ньютона.

Список використаної літератури

1. *Банда Б.* Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989. – 51 с.
2. *Бейко И., Бублик Б., Зинько П.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища шк., 1983. – 512 с.
3. *Васильев Ф.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 481 с.
5. *Пантелеев А., Летова Т.* Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.
6. *Поляк Б.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
7. *Пшеничный Б.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
8. *Пшеничный Б., Данилин Ю.* Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
9. *Сухарев А., Тимохов А., Федоров В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 326 с.
10. *Химмельбрау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 398 с.

Предметний покажчик